УДК 519.7

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕКУРРЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ[1]

© 2013 г. А. П. Афанасьев, С. М. Дзюба

На основе метода последовательных приближений Пикара строится приближенное рекуррентное решение автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правая часть которых представляет собой многомерный многочлен. Реализация данного метода возможна лишь с использованием современных вычислительных технологий, ориентированных на супер-компьютерные системы.

Ключевые слова: метод последовательных приближений Пикара, построение рекуррентных решений класса автономных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, векторная запись которой имеет вид

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^n)$ – действительная векторная функция действительного переменного t, а $f = (f^1, \ldots, f^n)$ – действительная векторная функция, каждый элемент которой f^i является многомерным многочленом переменных $x^1, \ldots, x^n$. При этом степени многочленов f^i и f^j могут не совпадать.

Системы вида (1) давно представляют достаточно большой интерес для приложений, поскольку многие модели процессов различной физической, технической и экономической природы описываются подобными системами. Особый интерес системы вида (1) приобрели в последнее время, поскольку многие известные системы, содержащие странные аттракторы, являются именно такими.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 12-01-00961, 13-07-00077).

Любой аттрактор по определению является компактным инвариантным множеством. В свою очередь, любое компактное инвариантное множество, как известно, содержит компактное минимальное множество. При этом любое минимальное множество состоит из замыканий траекторий рекуррентных решений и только из них.

В настоящее время вопрос о построении рекуррентных решений в общем случае не поднимался. Однако, умение моделировать минимальные множества при помощи численных методов дает дополнительные возможности для исследования сложного поведения динамических систем. Целью данной работы является разработка численного метода приближенного построения рекуррентных решений системы (1).

2. Локальные решения системы (1)

Для построения локального решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

заменим (1) интегральным уравнением

$$x(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x(\tau))\, d\tau. \tag{3}$$

Пусть α и r – некоторые положительное числа и

$$\Gamma_{\alpha,r}(x_0) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}\colon\ |x - x_0| \le \alpha,\ |t| \le r\right\}.$$

Обозначим через $\Pi_{\alpha,r}(x_0)$ – множество непрерывных функций, графики, которых содержатся в $\Gamma_{\alpha,r}(x_0)$. Рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}\varphi = x_0 + \int\limits_0^t f(\varphi(\tau))\, d\tau.$$

Поскольку замкнутый шар

$$B_\alpha(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x - x_0| \le \alpha\}$$

компактен, то существует положительное число

$$M = \max_{x \in B_\alpha(x_0)} |f(x)|.$$

Тогда из условия

$$r \le \frac{\alpha}{M} \tag{5}$$

следует, что оператор $\mathcal{A}$ отображает множество $\Pi_{\alpha,r}(x_0)$ в себя (см., например, [11]). Поэтому положим число r таким, что выполнено неравенство (5).

Для отыскания решения $x(t)$ уравнения (3) будем использовать метод последовательных приближений Пикара.[2] Поэтому запишем

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_N(\tau))\,d\tau. \tag{6}$$

Действуя как обычно, положим

$$x_1(t) \equiv x_0. \tag{7}$$

Тогда несложно заметить, что существует итерация

$$\mathcal{A}_p\varphi = \underbrace{\mathcal{A}\ldots\mathcal{A}}_{p}\varphi$$

оператора $\mathcal{A}$, являющаяся сжатием (см. [11]). Следовательно, метод (6), удовлетворяющий условию (7), на отрезке $[-r, r]$ равномерно сходится к решению $x(t)$.

Чтобы найти $x(t)$, заметим, что в силу (6) и (7) для всех $t \in [-r, r]$ справедливо равенство

$$x_2(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_0)\,d\tau = x_0 + f(x_0)t. \tag{8}$$

Теперь, подставляя (8) в (6), при $N = 2$ и $t \in [-r, r]$ имеем

$$x_3(t) = x_0 + \int\limits_0^t f(x_0 + f(x_0)\tau)\,d\tau = x_0 + \sum_{k=1}^{\theta_2} \xi_{2,k}(x_0)t^k,$$

[2]Применение метода Пикара здесь вполне обосновано, поскольку $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

где θ_2 – натуральное число, зависящее от вида формы f, а $\xi_{2,k}$ – соответствующие действительные векторные функции, определенные и непрерывные в точке x_0. При этом

$$\sum_{k=1}^{\theta_2} \xi_{2,k}(x_0)t^k = \int\limits_0^t f(x_0 + f(x_0)\tau)\, d\tau.$$

Если принять

$$\sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0)t^k = \int\limits_0^t f(x_N(\tau))\, d\tau, \tag{9}$$

то, несложно заметить, что в общем случае при $t \in [-r, r]$ справедливо равенство

$$x_{N+1}(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0)t^k, \tag{10}$$

в котором θ_N – натуральное число, зависящее лишь от N и вида формы f, а $\xi_{N,k}$ – соответствующие действительные векторные функции, определенные и непрерывные в точке x_0.

Поскольку метод (6) сходится к решению $x(t)$ уравнения (3) равномерно на отрезке $[-r, r]$, то переходя в (6) к пределу при $N \to \infty$, получим равенство

$$x(t) = x_0 + \xi(x_0, t), \tag{11}$$

справедливое для всех $t \in [-r, r]$, где при фиксированном x_0 функция

$$\xi(x_0, t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0)t^k \tag{12}$$

определена и непрерывна на отрезке $[-r, r]$, причем сходимость в равенстве (12) равномерна на $[-r, r]$. Но выбор начального условия (2) выше по существу не играл никакой роли. Поэтому справедлива следующая

Теорема 1. *Предположим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и число $\alpha > 0$ заданы. Тогда для всех положительных T, удовлетворяющих неравенству*

$$T \le \frac{\alpha}{M},$$

решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием (2) может быть получено равномерно сходящимся на отрезке $[-T,T]$ методом (6). Более того, при $t \in [-T,T]$ для решения $x(t)$ выполнены равенства (11) и (12).

Замечание 1. Если форма f нелинейна, то, как легко видеть,

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{\theta_N} = 0$$

и, более того,

$$\lim_{N\to\infty} (\theta_{N+1} - \theta_N) = \infty.$$

3. Нелокальные ограниченные решения

Пусть $x(t)$ – решение системы (1) с начальным условием (2), определенное для всех $t \geq 0$ и ограниченное при этих значениях t. Положим

$$\alpha = 2 \sup_{t\geq 0} |x(t) - x_0| \tag{13}$$

и зададим число M равенством

$$M = \max_{x\in B_\alpha(x_0)} |f(x)|. \tag{14}$$

Пусть при этом

$$T = \frac{\alpha}{2M}. \tag{15}$$

Для всех $t \geq 0$ положим

$$\bar{x}_K(t) = x(t + (K-1)T), \quad K = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

Легко видеть, что каждая функция семейства (16) является решением системы (1), определенным для всех $t \geq 0$. Более того, в силу (13)–(15) при $t \in [0,T]$ значения $\bar{x}_K(t)$ функции $\bar{x}_K$ содержатся в замкнутом шаре

$$B_{\frac{\alpha}{2}}(\bar{x}_K(0)) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\colon\ |x - \bar{x}_K(0)| \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$$

и, следовательно, в $B_\alpha(x_0)$. Поэтому в силу теоремы 1 для всех $t \in [0,T]$ справедливо равенство

$$\bar{x}_K(t) = \bar{x}_K(0) + \xi(\bar{x}_K(0), t),$$

в котором

$$\xi(\bar{x}_K(0), t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(\bar{x}_K(0)) t^k, \tag{17}$$

причем сходимость в (17) равномерна на $[0, T]$ (см. (6)–(12)). Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Предположим, что точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ задана и выполнены равенства (13)–(15). Тогда для всех значений $t \in [0, T]$ решение $x(t)$ удовлетворяет равенству*

$$x(t + (K-1)T) = x((K-1)T) + \xi(x((K-1)T), t), \tag{18}$$

в котором $K = 1, 2, \ldots$

Замечание 2. Если $x(t)$ – решение системы (1) с начальным условием (2), определенное и ограниченное для всех $t \le 0$, то найдется такое положительное число T_0, что на отрезке $[-T_0, 0]$ справедливо равенство

$$x(t + (1-K)T_0) = x((1-K)T_0) + \xi(x((1-K)T_0), t), \tag{19}$$

в котором $K = 1, 2, \ldots$ Таким образом, если решение $x(t)$ определено и ограничено при $|t| < \infty$, то в зависимости от значения t оно удовлетворяет одному из равенств (18) или (19).

4. Приближенное построение ограниченных решений

Вновь рассмотрим решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием (2), определенное и ограниченное для всех значений $t \ge 0$. Зафиксируем числа α, M и T по формулам (13)–(15). Обозначим через

$$x(0), x(T), \ldots, x(KT), \ldots \tag{20}$$

положения системы (1) в моменты времени

$$0, T, \ldots, KT, \ldots \tag{21}$$

Посредством равенства

$$g^t x_0 = x_0 + \xi(x_0, t)$$

введем в рассмотрение оператор g^t. Тогда согласно теореме 1 при $t \in [0, T]$ имеем

$$x(t) = g^t x_0.$$

В частности,

$$x(T) = g^T x_0.$$

Следовательно, в силу теоремы 2

$$x(KT) = \underbrace{g^T \dots g^T}_{K} x_0, \quad K = 1, 2, \dots \tag{22}$$

Таким образом, если оператор g^t построен, соотношение (22) однозначно задает положения (20) системы (1) в моменты времени (21). При этом в силу замечания 1 точное построение оператора g^t представляется весьма затруднительным, если вообще возможным, причем даже в простейших случаях (см. п. 5). Поэтому в дальнейшем ограничимся приближенным построением оператора g^t.

Для произвольного натурального числа N положим

$$g_N^t x_0 = x_0 + \sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x_0) t^k,$$

определяя тем самым приближение g_N^t к оператору g^t. Тогда в силу равенства (12) для каждого положительного числа ε можно указать такое натуральное число N_ε, что при $N > N_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\max_{0 \le t \le T} |g_N^t x_0 - g^t x_0| < \varepsilon.$$

Более того, согласно теореме 2 при заданном $\varepsilon > 0$ число $N > N_\varepsilon$ может быть подобрано так, что для всех $K = 1, 2, \dots$

$$|g_N^T x(KT) - g^T x(KT)| < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 2. Тогда оператор g_N^T всегда может быть построен так, что при фиксированном значении $\varepsilon > 0$ справедливы неравенства*

$$|g_N^T x(KT) - x((K+1)T)| < \varepsilon, \quad K = 0, 1, \dots \tag{23}$$

Замечание 3. Согласно (22) и (23) приближенные значения положений (20) системы (1) получены в аналитическом виде как функции начального условия (2) и моментов времени (21). Поэтому после символьного построения оператора g_N^T дальнейшие расчеты сводятся к вычислениям значений многомерного многочлена

$$\sum_{k=1}^{\theta_N} \xi_{N,k}(x(KT))T^k.$$

5. Приближенное построение рекуррентных решений

Для автономных систем общего вида (не обязательно с полиномиальной правой частью) справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение системы (1), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$ и ограниченное при $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда для каждого положительного числа T из каждой последовательности*

$$N_1, N_2, \ldots, N_k, \ldots, \quad \lim_{k\to+\infty} N_k = +\infty, \tag{24}$$

натуральных чисел можно выбрать такую ее подпоследовательность

$$N_{k_1}, N_{k_2}, \ldots, N_{k_l}, \ldots, \quad \lim_{l\to+\infty} N_{k_l} = +\infty,$$

что

$$\lim_{l\to+\infty} \xi(t + (N_{k_l} - 1)T) = \varphi(t) \tag{25}$$

равномерно на каждом из отрезков $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и

$$\lim_{l\to+\infty} \varphi(t + (N_{k_{l+1}} - N_{k_l})) = \varphi(t) \tag{26}$$

равномерно на всей оси $\mathbb{R}$, где $\varphi(t)$ – соответствующее рекуррентное движение.

Доказательство теоремы 4 в настоящей работе опускается (см. [1, 2]). Здесь заметим, что в условиях теоремы 4 выбор числа T не зависит от выбора последовательности (24) и обратно. При этом равенства (25) и (26) дают общий метод построения рекуррентных рекуррентных решений, расположенных в ω-предельном множестве Ω решения $\xi(t)$. Таким образом, метод построения приближенного аналитического решения системы (1), установленный теоремами 1–3, в сочетании с теоремой 4 дает приближенный метод построения рекуррентных решений данной системы.

Реализация предложенного метода сопряжена с огромными вычислительными трудностями, вызванными необходимостью контролировать ошибку вычислений.

В самом деле, в общем случае символьное построение оператора g_N^T (см. замечание 3) возможно лишь с использованием символьных вычислений в распределенной компьютерной среде. После того, как данный оператор будет построен, становится возможным приближенное аналитическое построение решений $\xi(t)$ и $\varphi(t)$, установленных условиями теоремы 4. При этом в силу (26) построение решения $\varphi(t)$ наталкивается на огромную вычислительную проблему. Именно, если в условиях теоремы 4 решение $\varphi(t)$ не является периодическим, то несложно заметить, что в этом случае

$$\sup_{l\geq 1}(N_{k_{l+1}} - N_{k_l}) = \infty \qquad (27)$$

вне зависимости от выбора последовательности (24) и числа T.

Таким образом, случай в котором справедливо равенство (27), является важнейшим. Поэтому программная реализация метода не может его исключать. Сказанное означает, что реализация метода приближенного построения рекуррентных решений возможна лишь при использовании современных вычислительных технологий, ориентированных на суперкомпьютерные системы.

6. Заключение

Идея использования степенных рядов и разложений по независимому переменному для исследования обыкновенных дифференциальных уравнений давно известна. Также давно известна и трудоемкость возникающего здесь вычислительного процесса. Однако, применение метода Пикара к системам с правой частью в виде многомерного многочлена позволяет снять многие проблемы.

Согласно теореме 1 локальное приближенное решение всегда удается построить в виде функции начального состояния и времени. Более того, в силу теоремы 2 это удается сделать и для нелокально продолжаемых ограниченных решений. Все вычислительные проблемы здесь фактически сводятся к символьному построению приближенного оператора g_N^T. Согласно теореме 3 данное построение всегда можно сделать с достаточно большой наперед заданной точностью.

Предлагаемый метод в сочетании с теоремой 4 дает метод приближенного построения рекуррентных решений системы (1). Реализация данного метода возможна лишь с применением современных вычислительных технологий, ориентированных на использование супер-компьютерных систем.

Список литературы

[1] *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* Периодический оператор сдвига и квазипериодические кривые // Дифференц. уравнения, 2004, т. 40, № 10, с. 1367–1372.

[2] *Афанасьев А.П., Дзюба С.М.* О рекуррентных траекториях, минимальных множествах и квазипериодических движениях динамических систем // Дифференц. уравнения, 2005, т. 41, № 11, с. 1544–1549.